الفصل الثاني : الدوال التحليلية

لتكن S مجموعة ما من الأعداد العقدية وليكن z متغير بإمكانه أن يأخذ أية قيمة من هذه المجموعة ولنفرض أن $w = f(z)$ علاقة تربط بين كل قيمة للمتغير z مع قيمة للمتغير w من المجموعة S' عندئذ ندعو z متغيراً مستقلاً وندعو w متغيراً تابعاً وندعو $w = f(z)$ دالة متغير عقدي.

ندعو المجموعة S نطاق تعريف الدالة أما المجموعة S' فندعوها مدى الدالة

وهناك نوعان من الدوال في الساحة العقدية

النوع الأول: دوال وحيدة القيمة (وحيدة التعيين)

مثال ذلك الدالة $w = f(z) = z^2$

نلاحظ من خلال المثال السابق أنه مقابل كل قيمة للمتغير المستقل z هناك قيمة واحدة وواحدة فقط للمتغير التابع w

النوع الثاني: دوال متعددة القيم (كثيرات التعيين)

مثال ذلك الدالة

$$w = f(z) = \sqrt{z} = (z)^{\frac{1}{2}}$$

ومن خلال هذا المثال نلاحظ أنه مقابل كل قيمة للمتغير z هناك قيمتان للمتغير التابع w

ملاحظة: عندما نلفظ دالة متغير عقدي فقط نعني بهذا أن الدالة المعطاة هي دالة وحيدة القيمة فيما عدا ذلك نذكر أن الدالة متعددة القيم

بفرض أن $z = x + iy$, $w = u + iv$ عندئذ $u + iv = f(x+iy)$

وبهذه العلاقة نستنتج أن كل من v , u يتعلق بالمتغيرين المستقلين x, y

مثال إذا كان $z = x + iy$, $w = f(z) = z^2$

عندئذ وبفرض أن $w = u + iv$ نجد أن

$$u + iv = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

واستناداً إلى تعريف تساوي عددين كليين ينتج أن

$u = x^2 - y \qquad v = 2xy$

كل من v, u عبارة عن دالة تتعلق بمتغيرين مستقلين x, y

لذلك يمكن التعبير عن دالة المتغير العقدي $w = f(z)$ بالشكل الآتي

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) \qquad (1)$$

ندعو $u = u(x, y)$ القسم الحقيقي للدالة $f(z)$ أي أن

$$Re\,f(z) = u(x, y)$$

كما ندعو $v = v(x, y)$ بالقسم التخيلي للدالة $f(z)$ أي أن

$$Im\,f(z) = v(x, y)$$

وبالعكس إذا أعطينا زوج من الدوال فإنه باستخدام العلاقة (1) يمكن من خلال هاتين الدالتين تعريف دالة متغير عقدي

مثال:

لتكن لدينا الدالتين:

$$u(x,y) = e^x \cos y \qquad v(x, y) = e^x \sin y$$

عندئذ العلاقة

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) = e^x \cdot \cos y + i e^x \sin y$$

كل من v, u دوال حقيقية تتعلق بـ x, y

وفي الحالة الخاصة عندما $v = 0$ ندعو الدالة $f(z) = w$ دالة متغير عقدي ذات قيم حقيقية

مثال: $f(z) = z \cdot \bar{z}$

نفرض أن $z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$f(z) = x^2 + y^2$$

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \qquad v(x, y) = 0$$

أن الدالة $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ ثوابت عددية . تدعى دالة كثيرة حدود من الدرجة n

ونطاق تعريف هذه الدالة بشكل عام هو المستوى العقدي بالكامل . أما الدالة

$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ حيث أن $p(z)$, $q(z)$ كثيرتا حدود ونطاق تعريف

هذه الدالة هو المستوى العقدي Z باستثناء النقاط التي تعدم المقام

النهايات :

لتكن لدينا الدالة $w = f(z)$ دالة معرفة عند جميع نقاط جوار ما للنقطة z_0

(وقد تكون الدالة غير معرفة عند النقطة z_0) لذلك نأخذ الجوار المثقوب عند

النقطة z_0

نقول عن العدد العقدي w_0 إنه نهاية الدالة $w = f(z)$ ونعبر عن ذلك بالرمز

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

إذا وفقط إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث أن

$|f(z) - w_0| < \varepsilon$ طالما أن $0 < |z - z_0| < \varepsilon$

~~[crossed out]~~ هذا يعني أنه يمكننا جعل النقطة w قريبة قرباً اختيارياً من النقطة w_0

طالما أن النقطة z قريبة قرباً كافياً من النقطة z_0

أي أن النقاط صور النقاط z التي تقع في الجوار δ تقع في الجوار ε

يمكن الإثبات على أن نهاية دالة إن وجدت فهي وحيدة

~~نفرض نهايتين~~

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1$$

ملاحظة :

نعلم أنه في الساحة الحقيقية تكون النهاية موجودة إذا وفقط إذا كانت مقبة

النهاية من اليمين تساوي قيمة النهاية من اليسار
ولكن في المساحة المعقدية وكون أن المتغير z بإمكانه أن يسير نحو z_0 وفق
عدد غير منته من الطرق فإنه إذا تساوت قيمتي النهاية وفق طريقين قطعيين فهذا
لا يعني بالضرورة بأن النهاية موجودة لأنه قد يكون هناك طريق آخر أو ثالث
تختلف فيه قيمة النهاية .
لكن إذا طلب منا إثبات أن النهاية غير موجودة لدالة ما نحسب هذه النهاية
وفق طريقين مختلفين فإذا اختلف قيمة النهاية وفق هذين الطريقين تكون
النهاية غير موجودة .

مثال :

لتكن لدينا الدالة $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$ أثبت أن نهاية هذه
الدالة غير موجودة عندما z تسعى نحو 0 .

$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$$ غير موجودة

الحل : لنفرض أن $z = x + iy$ عندئذٍ $\bar{z} = x - iy$ عندئذٍ على المحور الأفقي

$$\bar{z} = x \quad , \quad z = x$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

لنجعل z تسعى نحو z_0 على المحور التخيلي عندئذٍ $z = iy$, $\bar{z} = -iy$, $z = iy$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{y \to 0} \frac{-iy}{iy} = \lim_{y \to 0} -1 = -1$$

النهاية غير موجودة لأن قيمة النهاية اختلفت باختلاف الطريق المسلوك

مبرهنة: لتكن $w_0 = u_0 + iv_0$ ولتكن $z_0 = x_0 + iy_0$

و $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

عندئذ نهاية $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ إذا وفقط إذا كانت $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$

ونهاية $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$

الإثبات:

لنفرض أن نهاية $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ ولنثبت أن

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \wedge \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$

بما أن $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ هذا يعني (استناداً إلى تعريف

النهاية) أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$|f(z) - w_0| < \varepsilon$ $\quad 0 < |z - z_0| < \delta$

أي أن $|u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)| < \varepsilon$ طالما أن

$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ ولكن نعلم أن

$|\operatorname{Im} z| \leq |z| \quad , |\operatorname{Re} z| \leq |z|$ أي أن

$$|u(x,y) - u_0| \leq |u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)| < \varepsilon$$

و $|v(x,y) - v_0| \leq |u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)| < \varepsilon$

طالما أن $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ ومنه نجد أن

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \wedge \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$

وبالعكس: لنفرض أن:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \ \wedge \ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

ولنثبت على أن

$$\lim_{z\to z_0} (z) = w_0$$

بما أن

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad , \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

هذا يعني أنه من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta_1>0$ ومن أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta_2>0$

بحيث أن $|u(x,y)-u_0|<\frac{\varepsilon}{2}$ طالما أن $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta_1^2$

$|v(x,y)-v_0|<\frac{\varepsilon}{2}$ طالما أن $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta_2^2$

لكن

$$|f(z)-w_0| = |u(x,y)+iv(x,y)-u_0+iv_0|$$
$$= |u(x,y)-u_0+i(v(x,y)-v_0)|$$

لكن بالاستفادة من المتراجحة المثلثية $|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|$

$$\leq |u(x,y)-u_0|+|v(x,y)-v_0|<\varepsilon$$

$|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$ طالما أن $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$

$= |u_0 - v_0|$ حيث δ هو أصغر العددين δ_1 و δ_2 أي أن
$|u_0 - v_0|$

$|f(z)-w_0|<\varepsilon$ طالما أن $0<|z-z_0|<\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$

$f(z) = e^z = 1$

$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$1 + i . 0 = 1$

مبرهنة 2 - (بدون برهان):

إذا كانت $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ و $\lim_{z \to z_0} g(z) = W_0$.

فعندئذٍ

1- $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = w_0 + W_0$.

2- $\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = w_0 \cdot W_0$.

3- $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{W_0}$; $W_0 \neq 0$,

4- $\lim_{z = z_0} c = c$. حيث c ثابت عددي

5- $\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n$.

6- إذا كانت $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$.

$$\lim_{z \to z_0} p(z) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0 = p(z_0)$$

7- إذا كانت $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ فإن $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|$

الاستمرار (الاتصال):

لتكن $w = f(z)$ دالة متغير عقدي معرفة على النطاق S.

نقول أن الدالة $w = f(z)$ مستمرة عند النقطة z_0 إذا وفقط إذا كانت:

1- $\lim_{z \to z_0} f(z)$ موجودة.

2- $f(z_0)$ موجودة (أي أن f معرفة عند النقطة z_0)

3- $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

ملاحظة: في بعض المراجع يعرف الاستمرار عند النقطة z_0 بالشكل الآتي:

(تكون الدالة $w_0 = f(z)$ مستمرة عند النقطة z_0 إذا وفقط إذا كانت نهاية $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

وبلغة ε الشرط الثالث يعني أنه من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ فا

كما في الساحة الحقيقية يمكن الإثبات على أن مجموع دالتين مستمرتين على عند النقطة z_0 هي أيضاً دالة مستمرة عند النقطة z_0 كذلك الأمر يمكن

- الإثبات على أن جداء دالتين مستمرتين عند النقطة هي دالة مستمرة عند هذه النقطة.
- كذلك الأمر على أن قسمة دالتين مستمرتين هي دالة مستمرة عند النقطة z_0 بشرط دالة المقام لا تنعدم عند النقطة z_0
- إذا كانت الدالة $w = f(z)$ مستمرة عند النقطة z_0 وكانت الدالة $F = g(w)$ مستمرة عند النقطة w_0.

عندئذٍ تكون الدالة

أي الدالة الحاصلة لهاتين الدالتين هي أيضاً دالة مستمرة عند النقطة z_0

- يقول عن الدالة $w = f(z)$ أنها مستمرة على النطاق D إذا وفقط إذا كانت هذه الدالة دالة مستمرة عند كل نقطة من نقاط النطاق

ملاحظة و مبرهنة (بدون برهان):

إذا كانت الدالة $f(z) = u(x, y) + iv(x,y)$ فعندئذٍ تكون هذه الدالة

مستمرة عند النقطة $z_0=x_0+iy_0$ إذا وفقط إذا كانت الدالة $u(x,y)$ و $v(x,y)$ على كل منهما دالة مستمرة عند النقطة (x_0,y_0)

مثال: إذا كانت لدينا الدالة $f(z)=xy^2+i(2xy-1)$ ؟ هذه الدالة مستمرة عند جميع نقاط المستوي العقدي لأن

$$v(x,y)=2xy-1 \quad , \quad u(x,y)=xy^2$$

وبما أن v, u دالتين مستمرتين ⇐ f دالة مستمرة

ملاحظة هامة: عند دراسة القيمة العظمى للدوال

لتكن الدالة $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ دالة مستمرة على المنطقة المغلقة والمحدودة D عندئذٍ تكون الدالة

$$|f(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$$

عندئذٍ تكون هذه الدالة دالة مستمرة على هذه المنطقة $|f(x)|$ وهذه الدالة تبلغ قيمتها العظمى على هذه المنطقة بمعنى أنه يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن

$$|f(z)|\leq M \quad \forall\, z \in D$$

$$|f(z)|=M$$

من أجل نقطة واحدة على الأقل z من D

الاشتقاق:

لتكن $w=f(z)$ دالة معرفة ومستمرة عند النقطة z_0

إذا كانت النهاية التالية

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

موجودة

عندئذٍ نقول عن الدالة $w=f(z)$ أنها قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0

وإذا رمزنا لهذه النهاية بـ $f'(z_0)$ أي أن:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$ عندئذٍ تدعو هذه النهاية

المشتقة الأولى للدالة f عند النقطة z_0

وإذا وضعنا $z = z_0 + \Delta z$ أي أن $z - z_0 = \Delta z$ فعندئذٍ العلاقة

السابقة تكتب بالشكل:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

وإذا وضعنا $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ عندئذٍ العلاقة الأخيرة تكتب

بالشكل

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

ويمكننا أن نعبر عن المشتقة الأولى بـ $\frac{d}{dz} f(z)$

مثال: لتكن لدينا الدالة $f(z) = z^2$ اعتماداً على تعريف المشتقة

أثبت أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط

المستوي العقدي

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z.\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} 2z + \Delta z = 2z$$

أي أن الدالة قابلة للاشتقاق والمشتقة الأولى لها هي $2z$

أي أن $f'(z)=2z$

مثال 2:

لتكن لدينا الدالة $f(z)=|z|^2=z\cdot\bar{z}$ أثبت استناداً إلى تعريف المشتقة أن هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 وغير قابلة للاشتقاق عند النقاط $z\neq 0$ (أي عند باقي نقاط المستوي العقدي)

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z}$$

$$=\frac{(z+\Delta z)\cdot\overline{(z+\Delta z)}-z\cdot\bar{z}}{\Delta z}$$

$$=\frac{(z+\Delta z)\cdot(\bar{z}+\overline{\Delta z})-z\cdot\bar{z}}{\Delta z}$$

$$=\frac{z\cdot\bar{z}+z\cdot\Delta\bar{z}+(\Delta z)\cdot\bar{z}+\Delta z\cdot\Delta\bar{z}-\bar{z}}{\Delta z}$$

$$=z\cdot\frac{\Delta\bar{z}}{\Delta z}+\bar{z}+\overline{\Delta z}$$

عندما $z=0 \Rightarrow \bar{z}=0$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=0$$

أي أن الدالة المعطاة في هذا المثال قابلة للاشتقاق عند النقطة $z=0$

و $f'(0)=0$

عندما $z\neq 0$ من أجل ذلك لنجعل Δz تسعى نحو الصفر أولاً على المحور الحقيقي

$\Delta z=\Delta x \Rightarrow \Delta\bar{z}=\Delta x$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=z+\bar{z}$$